

Matrices échelonnées

$$\bullet GL_n(K) \hookrightarrow M_{n,p}(K)$$

$$(P, M) \mapsto PM.$$

• Dans toute orbite, il existe une matrice échelonnée (Pivot de Gauss).

Def. matrice échelonnée réduite: matrice échelonnée (ie nb de zéros débutant chaque ligne est strictement croissant).

• si en plus chaque 1^{er} terme non nul des lignes est 1 et qu'il n'y a que des zéros au dessus, elle est échelonnée réduite.

ex: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

pas échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

échelonnée réduite

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pas réduite.

Prop. $A \sim B$ si: $\text{Ker } A = \text{Ker } B$.

Dém. $\Rightarrow$ $A = PB$, P inversible donc $\text{Ker } A = \text{Ker } B$

$\Leftarrow$ Notons $F = \text{Ker } A = \text{Ker } B$, G un supplémentaire.

Soit $\beta = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée.

Notons $(Ae_{r+1}, \dots, Ae_n) = (f_{r+1}, \dots, f_n)$ et $(Be_{r+1}, \dots, Be_n) = (g_{r+1}, \dots, g_n)$

Ces 2 familles sont libres car on a appliqué A et B sur un suppl du noyau. On complète donc en 2 bases $(f_1, \dots, f_n)$, $(g_1, \dots, g_n)$.

Soit P la matrice de passage de (f_i) dans (g_i) .

On veut mq A et PB coïncident sur (e_i) .

$$(Ae_1, \dots, Ae_r) = (0, \dots, 0) ; (PB e_1, \dots, PB e_r) = (P0, \dots, P0) = (0, \dots, 0)$$

$$(Ae_{r+1}, \dots, Ae_n) = (f_{r+1}, \dots, f_n) ; (PB e_{r+1}, \dots, PB e_n) = (Pg_{r+1}, \dots, Pg_n) = (f_{r+1}, \dots, f_n).$$

Donc $A = PB$. $A \sim B$ $\square$

Prop.

Chaque orbite contient une matrice échelonnée réduite.

Dém. Gauss pour une matrice échelonnée, puis on multiplie chaque ligne par l'inverse de son 1^{er} coeff non nul, puis on tue les coeffs des lignes supérieures.

Ex:
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Gauss $\rightarrow$
$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 6 & -12 & 12 & 6 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

On multiplie par l'inverse:
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On tue: $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2$:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - 5L_3 \\ L_2 &\leftarrow L_2 - L_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{OK} \quad \square$$

Théorème. (2)

Chaque orbite contient une unique matrice échelonnée réduite.

Dém. Soit B une matrice, et supposons qu'il existe 2 matrices échelonnées U et V tq: $U = PB$, $V = P'B$.

Alors $U = PB = P(P')^{-1}V$. Notons $C = P(P')^{-1}$.

Alors $U = CV$. $\forall C = I_n$.

(1) <http://en.wikibooks.org> Linear Algebra - Row Reduction and Echelon Forms.

(2) www.cs.berkeley.edu/~wkahan/MathH110/RREF1.pdf.

Not: l_j le vecteur colonne j de la matrice identité, u_j celui de U , v_j celui de V , c_j celui de C . $u_j = U l_j$, $c_j = C l_j$, $v_j = V l_j$

Si $v_j = 0$, alors $u_j = U l_j = C V l_j = C v_j = 0$.

De $\hat{m}$, si $u_j = 0$ alors $v_j = 0$.

Esq: on "enlève" les colonnes nulles de U et V puisqu'elles coïncident.

On a alors $u_1 = v_1 = l_1$ (on utilise le fait que U et V sont échelonnées réduites)
 $c_1 = C l_1 = C v_1 = C V l_1 = U l_1 = u_1 = l_1$.

Du coup, toutes les colonnes de U qui sont proportionnelles à l_1 correspondent à des colonnes de V prop à l_1 , et elles sont $\hat{m}$ égales.

$$U = \begin{pmatrix} \overset{j_1}{1} & 2 & -1 & \overset{j_2}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On note j_2 la 1^{ère} colonne de U qui n'est pas prop à l_1 . $j_2 = l_2$ (on utilise encore que U est échelonnée réduite). Du coup, la colonne correspondante dans V n'est pas prop à l_1 , et c'est la 1^{ère} du genre, c'est donc l_2 aussi. Comme toutes les colonnes dans $[j_1, j_2 - 1]$ sont les $\hat{m}$, on peut les virer.

On continue par récurrence: supposons que les k 1^{ères} colonnes de U et V coïncident (~~on a mg c'était vrai pour $k=2$~~) et forment le début de la matrice identité, et que les $k-1$ 1^{ères} colonnes de C coïncident avec la matrice identité (on l'a montré pour $k=2$).
 $c_k = C l_k = C V l_k = U l_k = u_k = l_k$. La k ^e colonne de C est celle de l'identité.

Si pour $j \geq k$ on a une colonne de V prop à l_k , alors
 $u_k = U l_k = C V l_k = C v_k = v_k$. Les seules colonnes de V candidates pour être prop à l_k sont celles juste après v_k , de par la forme de V . Supposons $\forall j \in [k, j_{k+1} - 1], v_j = d_k l_k$.

Alors $\forall j \in [k, j_{k+1} - 1] = d_k l_k = v_k$. Ces colonnes correspondent donc on peut les virer. A la base, $v_{j_{k+1}} = u_{j_{k+1}} = l_{k+1}$ mais comme on

à virer les colonnes, ça donne $v_{k+1} = u_{k+1} = I_{k+1}$, ce qui achève la récurrence.

Au final, $U=V$ après qu'on ait enlevé des colonnes identiques, donc $U=V$ après qu'on les ait restaurées. $\square$

Corollaire:

$A \sim B$ ss: elles ont $\hat{m}$ matrice échelonnée réduite.